PC* 1 : Programme de colles de mathématiques n°1

Semaine du 23 *septembre* 2024 *au* 27 *septembre* 2024

Algèbre linéaire

Questions de cours

- Théorème du rang (forme géométrique) : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $E = \operatorname{Ker} u \oplus E'$, alors u induit un isomorphisme de E' sur $\operatorname{Im} u$.
- Définition d'un projecteur; $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$; lien entre symétrie et projecteurs.
- Définition d'une somme directe de sous-espaces vectoriels. Caractérisation. Inégalité $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$. Caractérisation du cas d'égalité en termes de somme directe.
- Si $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$ et u et v commutent, alors $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par v. Cas $v = P(u)$.
- Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et F est un sous-espace stable par u : forme de la matrice dans une base adaptée à F. Déterminant par bloc (avec démonstration).
- Trace : définition et propriétés.
- Polynômes de Lagrange : définition, formule d'interpolation.
- Déterminant de Vandermonde (avec démonstration).
- Polynômes d'endomorphismes, de matrices : définition, morphisme.

Le programme

1° Révisions du programme de Sup d'algèbre linéaire.

2° Programme de Spé d'algèbre linéaire :

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée. Relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Polynôme annulateur. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Application au calcul de l'inverse et des puissances. Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
e) Interpolation de Lagrange	
Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.	Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.